Cours 27 – 19/12/2024

11. Applications du solide indéformable

11.5. Stabilité gyroscopique

11.5. Stabilité gyroscopique

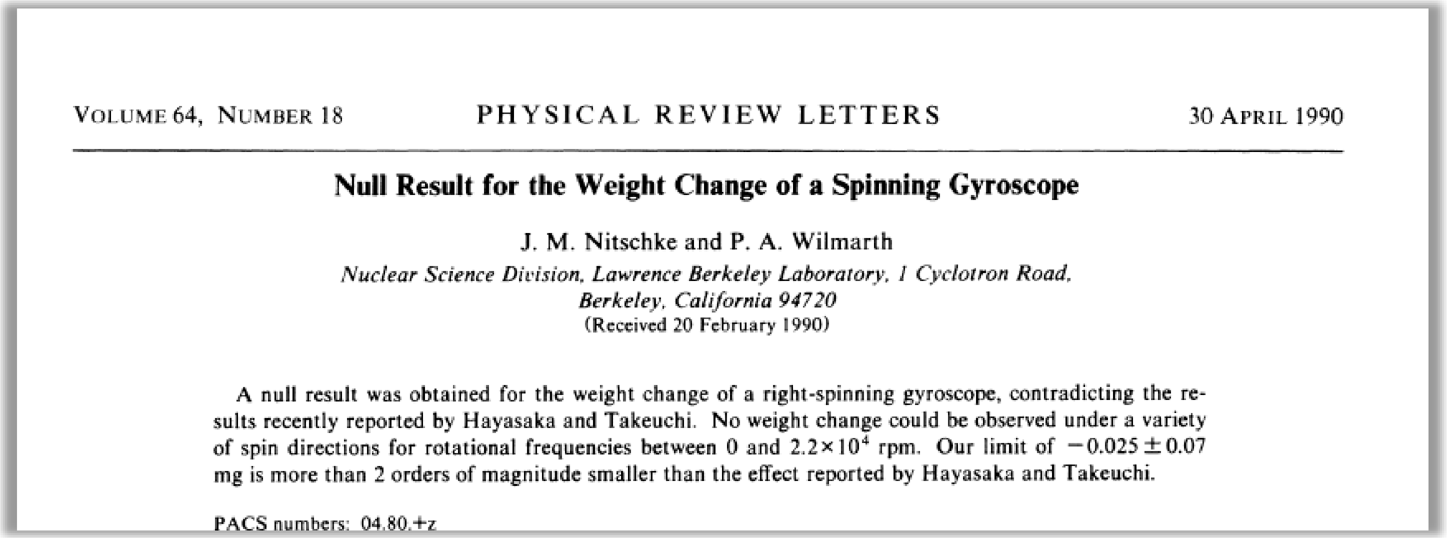
Gyroscope : l’effet «anti-gravité» ?

11.5. Stabilité gyroscopique

Gyroscope : l’effet «anti-gravité» n’existe pas

Professeur Eric Laithwaite, Imperial College (1983)

Le poids reste constant



VOLUME 64, NUMBER 18 PHYSICAL REVIEW LETTERS 30 APRIL 1990

Null Result for the Weight Change of a Spinning Gyroscope

J. M. Nitschke and P. A. Wilmarth
Nuclear Science Division, Lawrence Berkeley Laboratory, 1 Cyclotron Road, Berkeley, California 94720
(Received 20 February 1990)

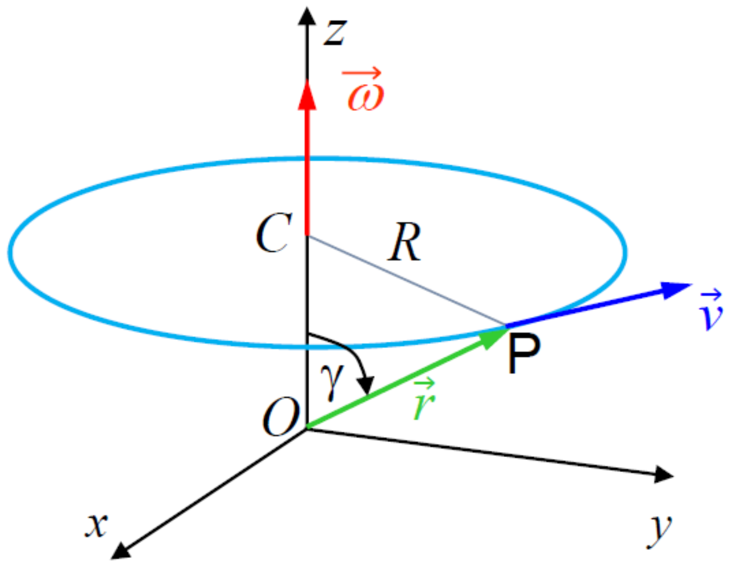
A null result was obtained for the weight change of a right-spinning gyroscope, contradicting the results recently reported by Hayasaka and Takeuchi. No weight change could be observed under a variety of spin directions for rotational frequencies between 0 and 2.2×10^4 rpm. Our limit of -0.025 ± 0.07 mg is more than 2 orders of magnitude smaller than the effect reported by Hayasaka and Takeuchi.

PACS numbers: 04.80.+z

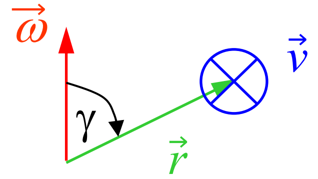
Révisions

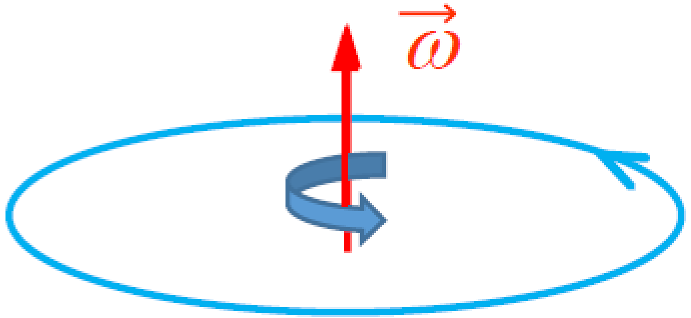
Newton – point matériel

- Mouvement en rotation



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$





Newton – point matériel

- Mouvement en rotation

soit ω la vitesse angulaire

Accélération angulaire :

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

Accélération tangentielle :

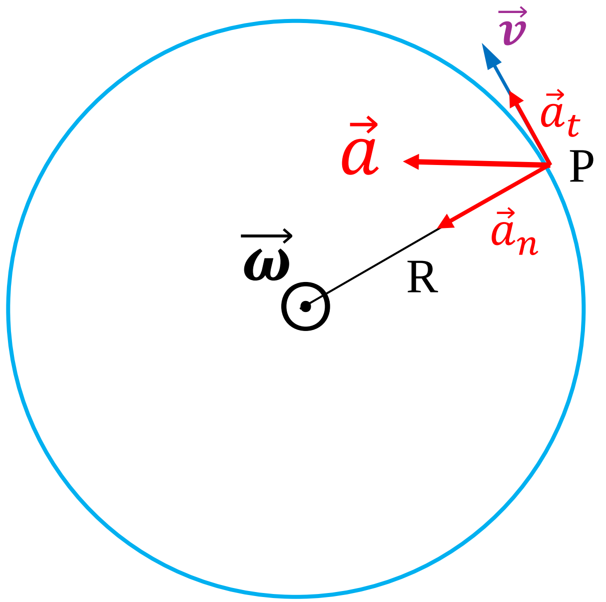
$$a_t = \dot{v} = R\,\dot{\omega} = R\alpha = R\,\ddot{\theta}$$

(v = ω R avec R cte)

Accélération normale (centripète) :

$$a_n = v^2/R = R\omega^2 = R\dot{\theta}^2$$

(avec $v = R\omega$)



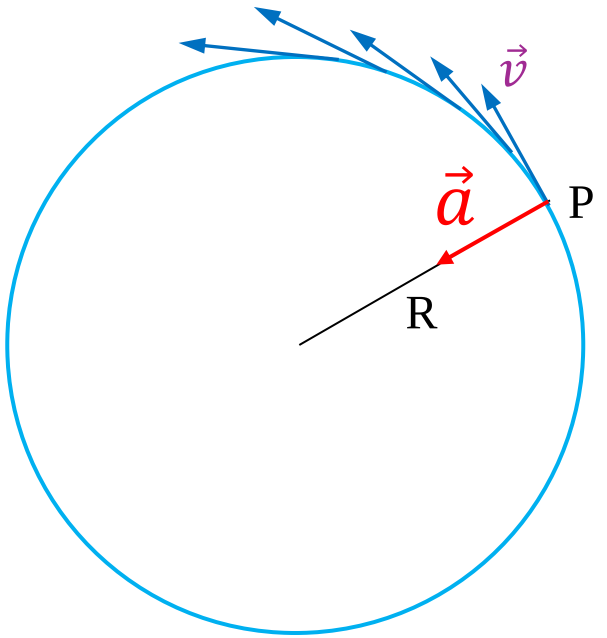
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

Remarque : *mouvement circulaire uniforme ⇨ $v = cte$ d'où $a_t = 0$ mais a_n non nulle ($=v^2/R$)*

Newton – point matériel

- Dérivée d'un vecteur et dérivée de la norme d'un vecteur

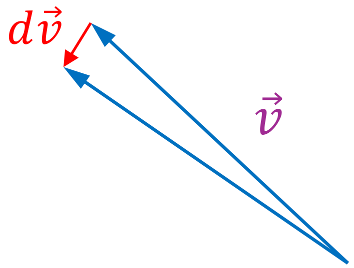
<u>Exemple</u> : mouvement circulaire uniforme



● Vitesse uniforme, donc $v = cte$.

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} = 0$$

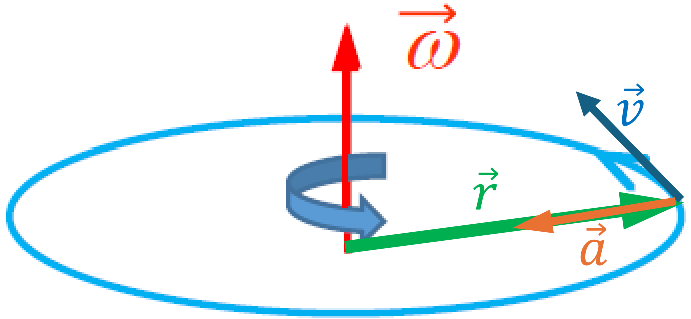
● Vecteur vitesse : norme constante mais direction change



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

Newton – point matériel

- Dérivée d'un vecteur de norme constante en rotation



$$\boxed{\dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \vec{u}}$$

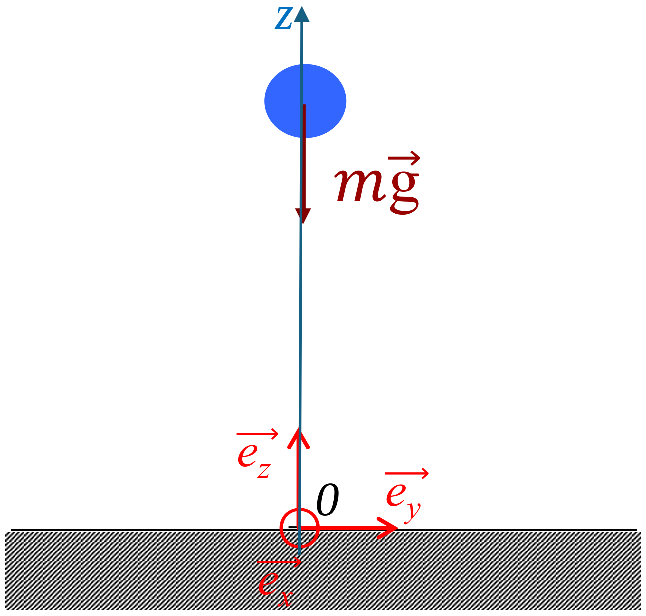
Exemples :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}$$

Newton – point matériel

- Projection



$$m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_{ext,i}}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} = -\mathrm{mg}\overrightarrow{e_z}$$

Projections :

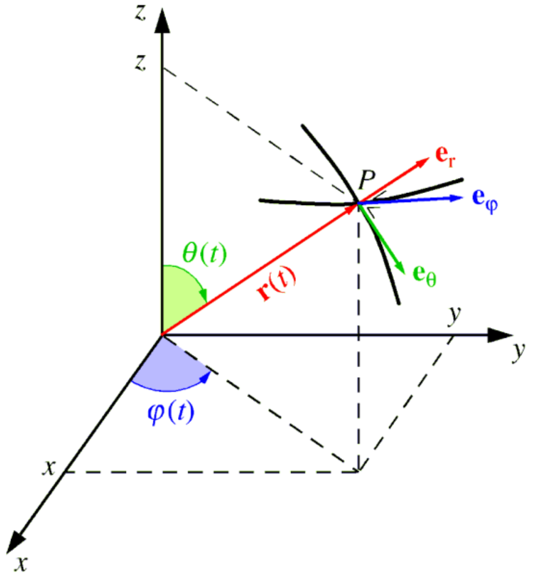
$$Ox : m\ddot{x} = 0$$

$$Oy : m\ddot{y} = 0$$

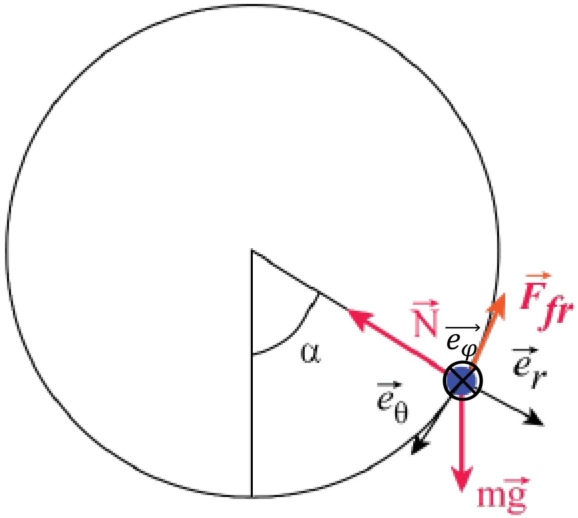
$$Oz : m\ddot{z} = -mg$$

Newton – point matériel

- Coordonnées sphériques



Accélération
$$\boxed{\vec{\mathrm{a}} = a_r\vec{\mathrm{e}}_r + a_\varphi\vec{\mathrm{e}}_\varphi + a_\theta\vec{\mathrm{e}}_\theta \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \end{cases}}$$



$ma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$ = projection des forces sur $\vec{e_r}$

$ma_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta$ = projection des forces sur $\vec{e_\varphi}$

$ma_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta$ = projection des forces sur $\vec{e_\theta}$

Newton – point matériel

- Repère non-galiléen R'

$$\boxed{m\overrightarrow{a'} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} - m\overrightarrow{a_{Cor}} - m\overrightarrow{a_{in}}}$$

$$\boxed{m\overrightarrow{a'} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} + \underbrace{\overrightarrow{F_{Cor}}}_{\text{Force de Coriolis}} + \underbrace{\overrightarrow{F_{in}}}_{\text{Force d'inertie}}}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{Cor}} = -\, m\, 2\vec{\omega} \times \vec{v'} \\ \overrightarrow{F_{in}} = -m\, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \quad ou - m\overrightarrow{a_e} \end{cases}$$

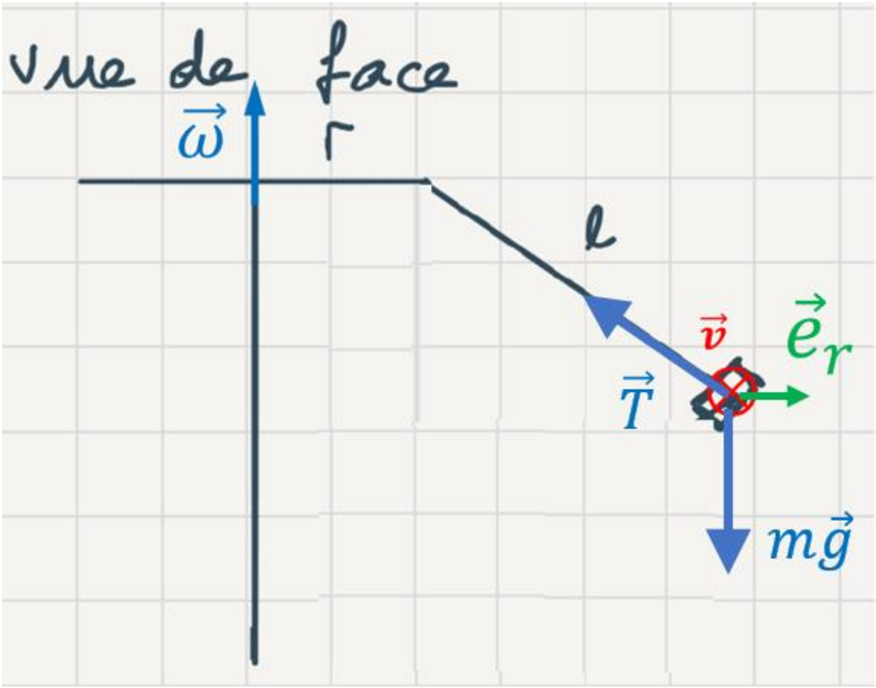
Newton – point matériel

- Choix repère – mouvement en rotation

Dans R : $-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} = m\vec{g} + \vec{T}$

Dans R' : $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in}$

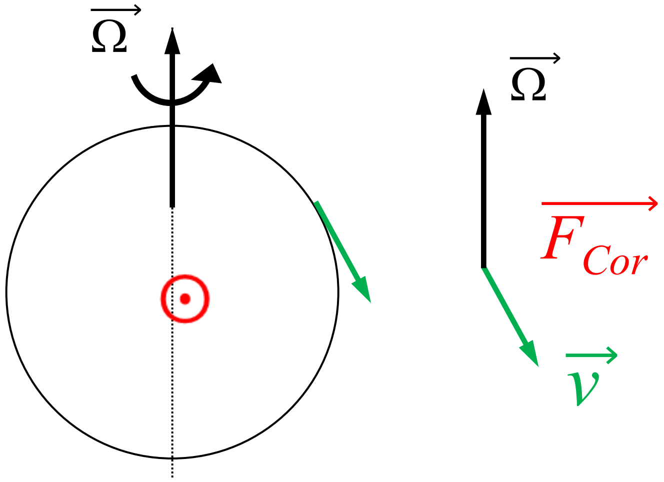
$= m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$

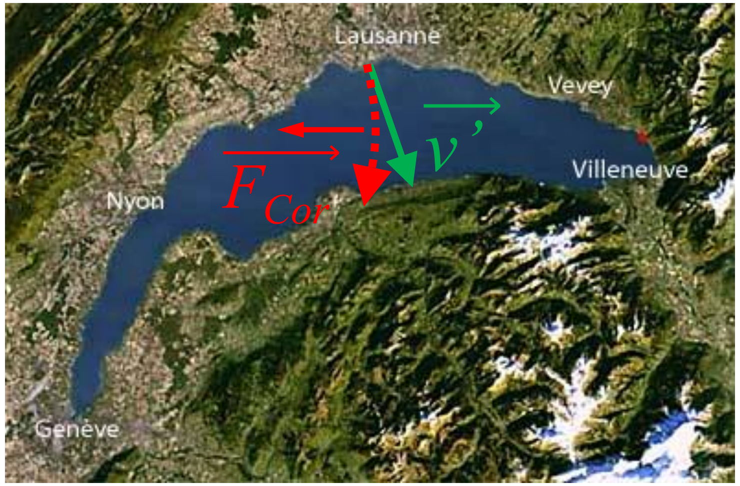


Newton – point matériel

- Coriolis

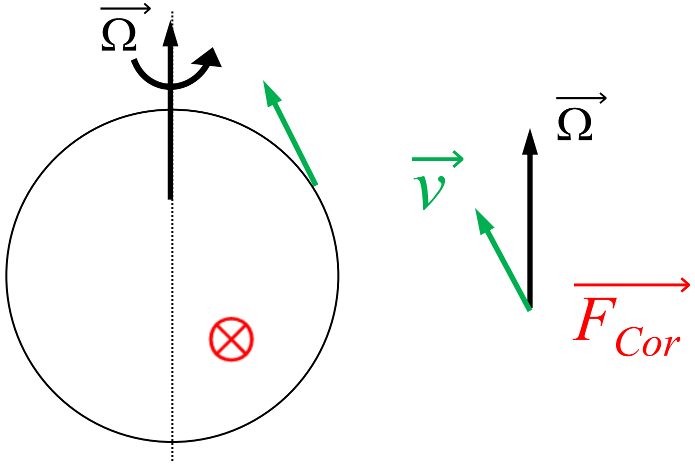
Lancé vers le Sud

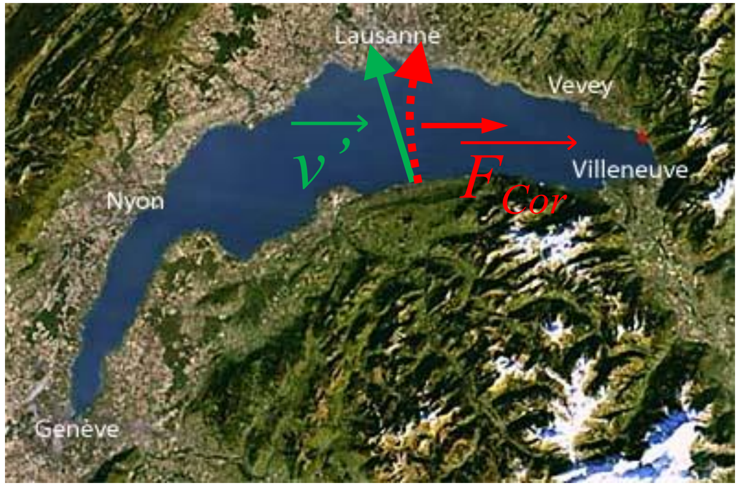




$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

Lancé vers le Nord





Newton – point matériel

- Coriolis – vitesse non constante (chute libre)

2nde loi de Newton dans un référentiel non-galiléen : $m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{in}} + \overrightarrow{F_{cor}} = m\vec{g} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$

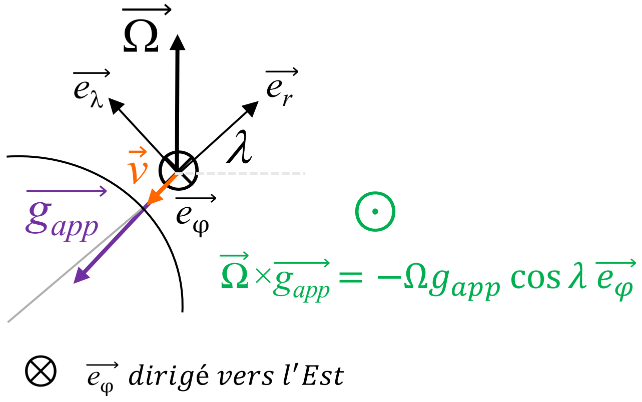
$$= m\overrightarrow{g_{app}} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{g_{app}} - 2\,\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{g_{app}}\,t - 2\,\vec{\Omega} \times \vec{r} + \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{g_{app}}t^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_0^t \boxed{\vec{r}}\,\mathrm{dt} + \overrightarrow{cte}$$

<u>Approximation</u> : déviation faible donc trajectoire rectiligne au 1er ordre soit $\boxed{\vec{r} \approx \frac{1}{2}\overrightarrow{g_{app}}t^2}$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{g_{app}}t^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_0^t \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{g_{app}}t^2}\,\mathrm{dt}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{g_{app}}t^2 - \vec{\Omega} \times \overrightarrow{g_{app}} \int_0^t t^2\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{g_{app}}t^2 + \boxed{\frac{\Omega g_{app} t^3}{3}\cos\lambda\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$ déviation

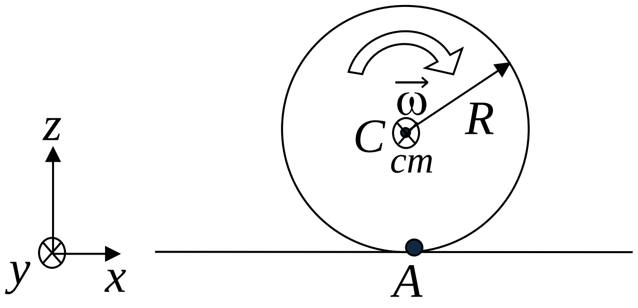


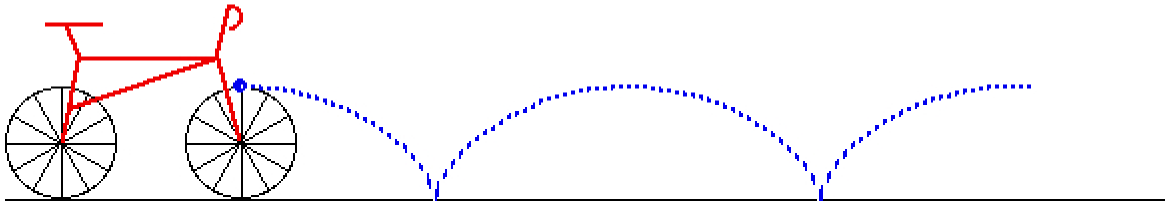
Force de frottement

- Roulement sans glissement

La présence d'une force de frottement entre la roue et le sol permet un roulement sans glissement

$\Rightarrow$ ceci impose que la vitesse du point de contact en A de la roue avec le sol soit nulle



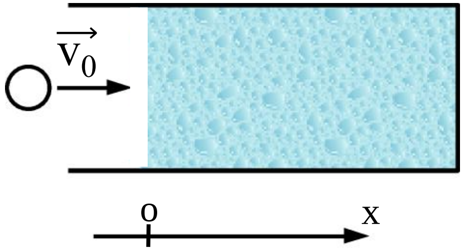


$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA}$ (rotation autour de l'axe passant par le cm)

La condition de roulement sans glissement est $\vec{v}_A = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{v_{cm}} = \omega R\, \overrightarrow{e_x}}$

Force de frottement

- Frottement fluide



$$\vec{F}_f = -K\eta\,\vec{v}$$

$m\vec{a} = \vec{F}_f$ on pose $\lambda = K\eta/m$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\lambda v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\lambda\, dt$$

on intègre : $\ln v = -\lambda t + cte$

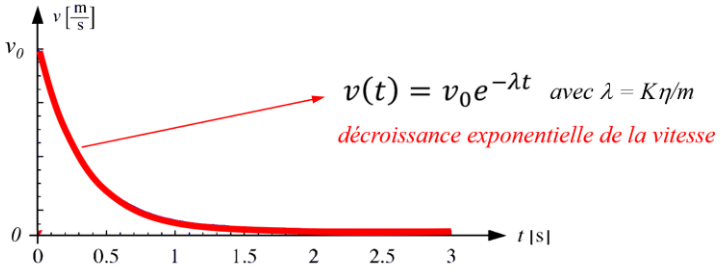
$$\ln v = -\lambda t + \ln v_0$$

$$\ln v - ln v_0 = -\lambda t$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\lambda t \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\lambda t}$$

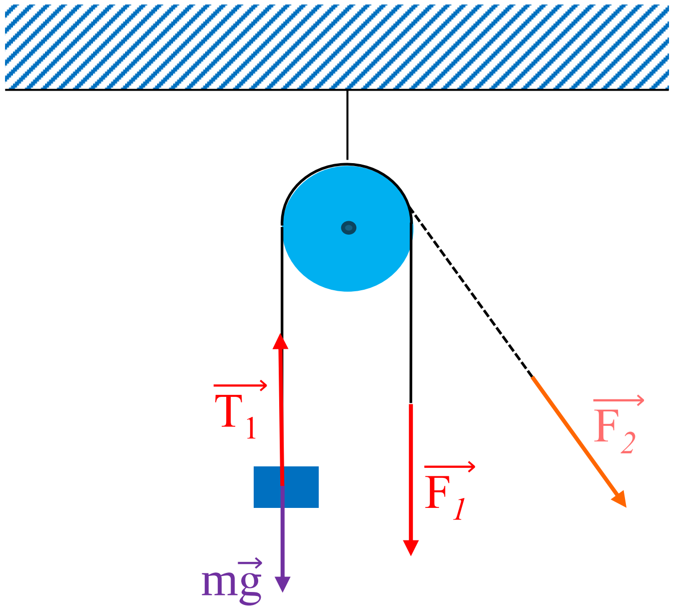
Et finalement: $\boxed{v(t) = v_0 e^{-\lambda t}}$

Evolution de la vitesse en fonction du temps



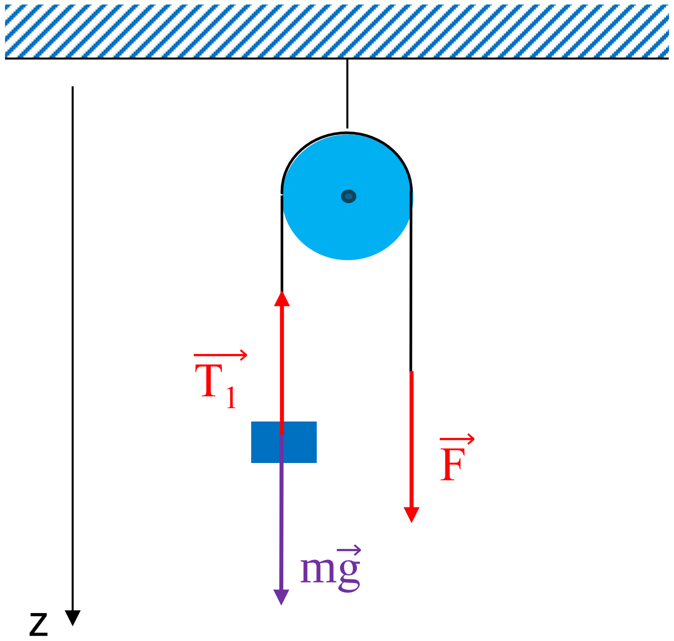
Poulies

- Force de tension



$\|\vec{F_1}\| = \|\vec{F_2}\| = \|\vec{T_1}\|$

$$\boxed{T_1 = F}$$



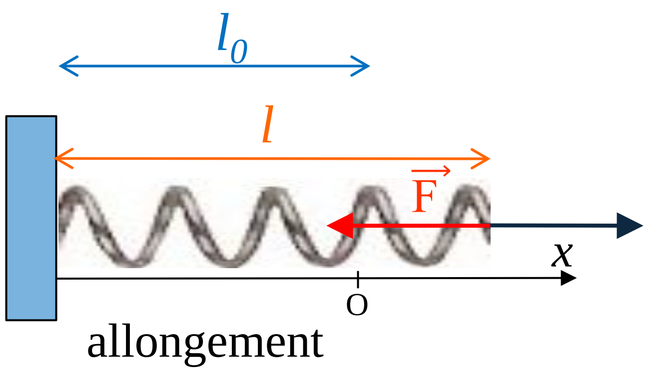
La masse m se déplace avec une <u>accélération non nulle</u>

$$\sum_{\text{sur la masse}} \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow mg - T_1 = ma \Rightarrow mg - ma = T_1 \Rightarrow T_1 = m(g-a)$$

soit $\boxed{T_1 \neq mg}$

Ressort

- Force de rappel et Energie potentielle



Force de rappel du ressort : $\boxed{\vec{F} = -k\,(l - l_0)\vec{e_x}}$

k constante de raideur du ressort

Après projection sur Ox avec origine à l'extrémité du ressort au repos :

$$F = -k\,x \quad avec \quad x = l - l_0$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

Attention : x est l'allongement du ressort

$x = l - l_0$

L'énergie potentielle est nulle pour $x=0$

Energie et travail

- Travail d'une force $\vec{F}$ $\boxed{W_{AB} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$

- Energie cinétique $\boxed{W_{AB} = E_{c,B} - E_{c,A}}$

- Energie potentielle $\boxed{W_{AB} = E_{p,A} - E_{p,B}}$

Energie mécanique : $\boxed{E = E_c + E_p = cte}$ l'énergie mécanique est constante s'il n'y a pas de dissipation d'énergie (pas de force de frottement par exemple)

La variation d'énergie mécanique correspond au travail de la force de frottement W' :

$\boxed{(E_c + E_p)_B - (E_c + E_p)_A = W'}$ avec $W' < 0 \Rightarrow$ perte d'énergie vers l'extérieur

Choc

- Elastique

Condition 1 (C1) : Conservation de la quantité de mouvement

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} \qquad \textit{relation vectorielle}$$

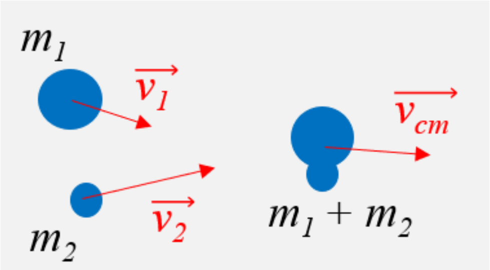
Condition 2 (C2) : Conservation de l'énergie cinétique

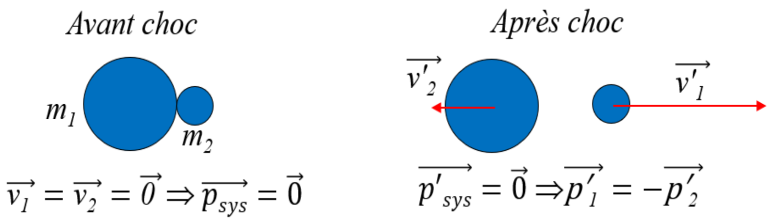
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

$$\textit{ou encore} \quad \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}$$

Choc

- 100% inélastique (mou)





Une seule condition (C1) : Conservation de la quantité de mouvement

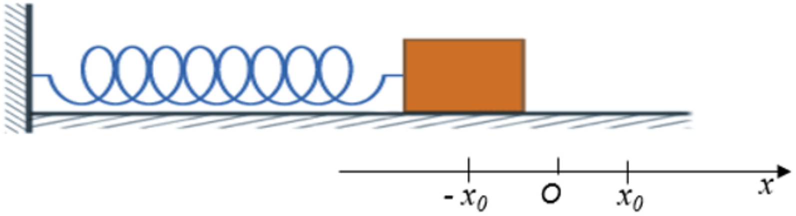
$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$$

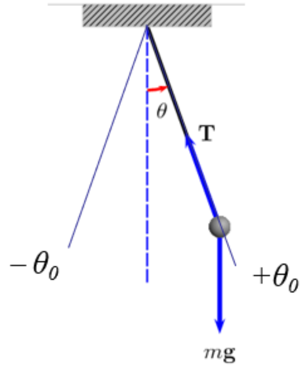
$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{v_{cm}}$$

Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \neq \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_{cm}^2$

Oscillateur

- Libre (pas de frottement)





Ressort + Masse

Equation du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \; (= x_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$$

avec x_0 *amplitude du mouvement*
ω_0 *pulsation propre de l'oscillateur*
$\phi\ (\phi')$ *phase initiale (à* $t = 0$*)*

Pendule

Equation du mouvement :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\, \theta = 0 \quad avec \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Approximation aux petits angles ($\sin\theta \approx \theta$)

Les solutions sont de la forme :

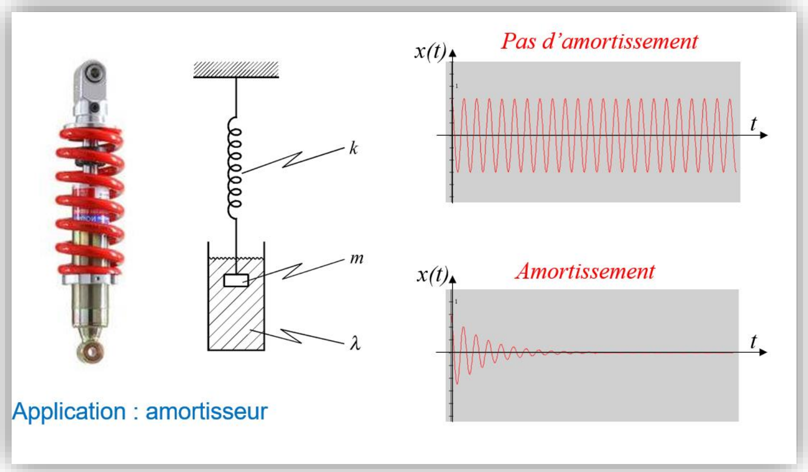
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \; (= \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$$

avec θ_0 *amplitude du mouvement*
ω_0 *pulsation propre de l'oscillateur*
$\phi\ (\phi')$ *phase initiale (à* $t = 0$*)*

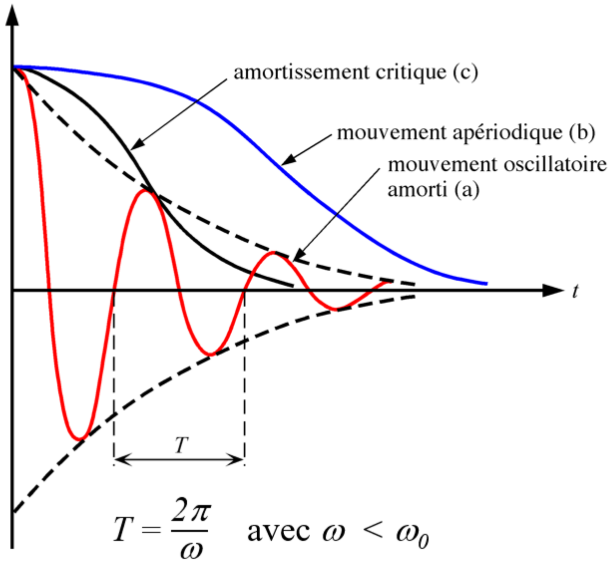
Si ω_0 est indépendante de l'amplitude $\Rightarrow$ oscillateur harmonique
La position de la particule se répète à un intervalle de temps régulier (période) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Oscillateur

- Amorti



avec $\lambda = \frac{K\eta}{2m}$ coefficient d'amortissement



$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{avec } \omega < \omega_0$$

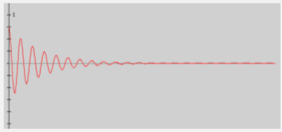
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- **Amortissement faible :** $\lambda < \omega_0$

Mouvement oscillatoire avec amplitude décroissante et avec $\omega < \omega_0$

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

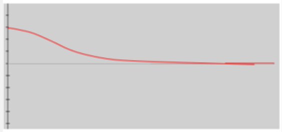


- **Amortissement fort :** $\lambda > \omega_0$

Mouvement apériodique (plus d'oscillations)

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A_1\, e^{\omega t} + A_2\, e^{-\omega t})$$

avec $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$



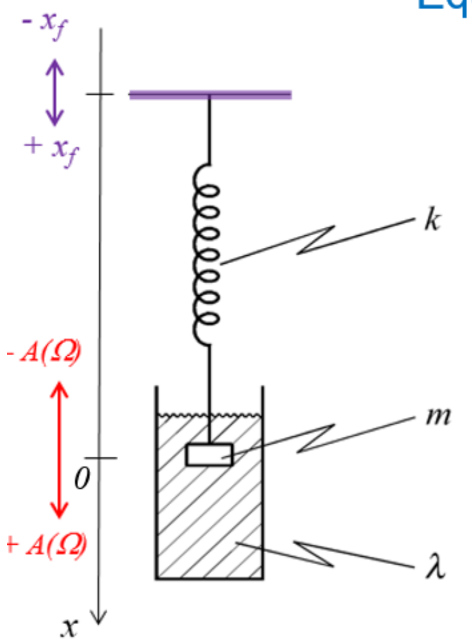
- **Amortissement critique :** $\lambda = \omega_0$

Retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans aucune oscillation

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}$$

Oscillateur

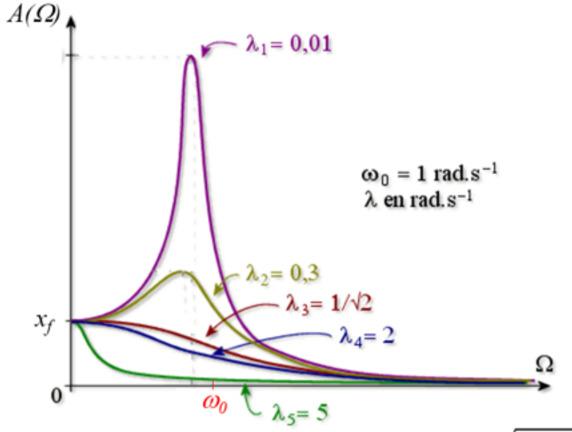
- Forcé



Equation du mouvement : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)}$ avec $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \textit{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ f = \frac{F_e}{m} = \frac{kx_f}{m} \end{cases}$

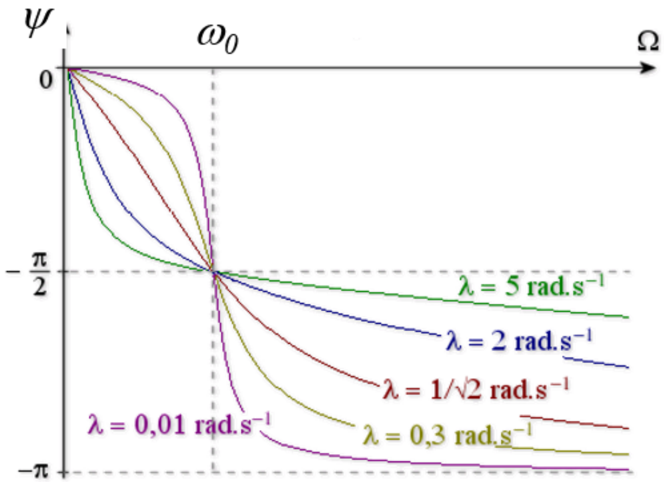
Solution : $\boxed{x(t) = A\cos(\Omega t + \Psi)}$

Amplitude $A(\Omega) = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$



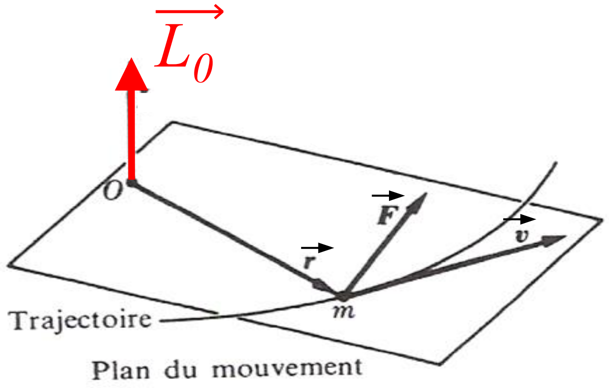
Pulsation de résonance : $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

Déphasage $\psi(\Omega) = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$



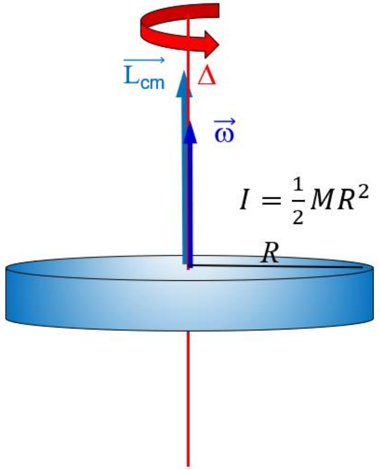
Moment cinétique

- Pour un point



$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

- Pour un solide avec rotation autour d'un axe principal d'inertie



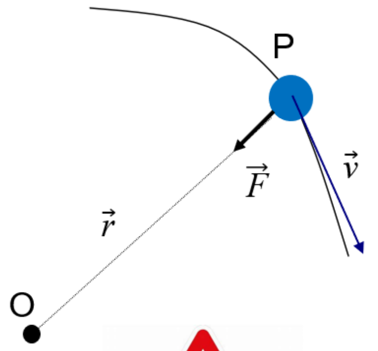
$$\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}}$$

Moment cinétique

- Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_O}\,(\overrightarrow{F_{ext,i}})}$$

$\overrightarrow{M_O}\,(\vec{F_i})$ est le moment de la force $\vec{F_i}$ par rapport à O (point fixe)



Cas d'une force centrale :

Dans ce cas, $\vec{F}$ colinéaire à $\vec{r}$ d'où $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$

et la dérivée temporelle du moment cinétique est nulle.

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \implies \overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{cte}}$$

Quand un objet se déplace sous l'action d'une force centrale, son moment cinétique est constant dans le temps.

Gravitation

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$$ *Force de gravitation*

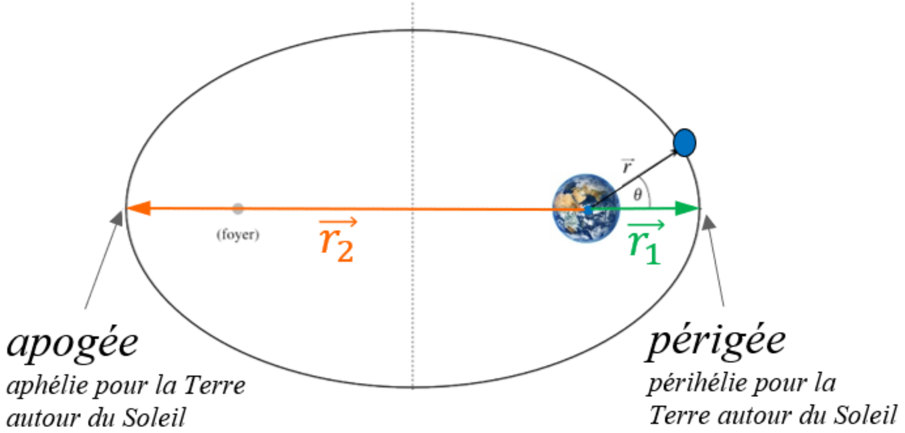
■ Energie potentielle

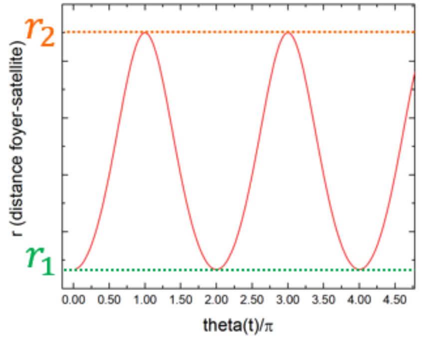
$$\boxed{E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

Energie potentielle gravitationnelle. On remarque que $E_p(\infty)=0$

■ Energie cinétique

$$\boxed{E_c(r) = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}}$$





■ Moment cinétique

$L = cte$ car la force de gravitation est une force centrale

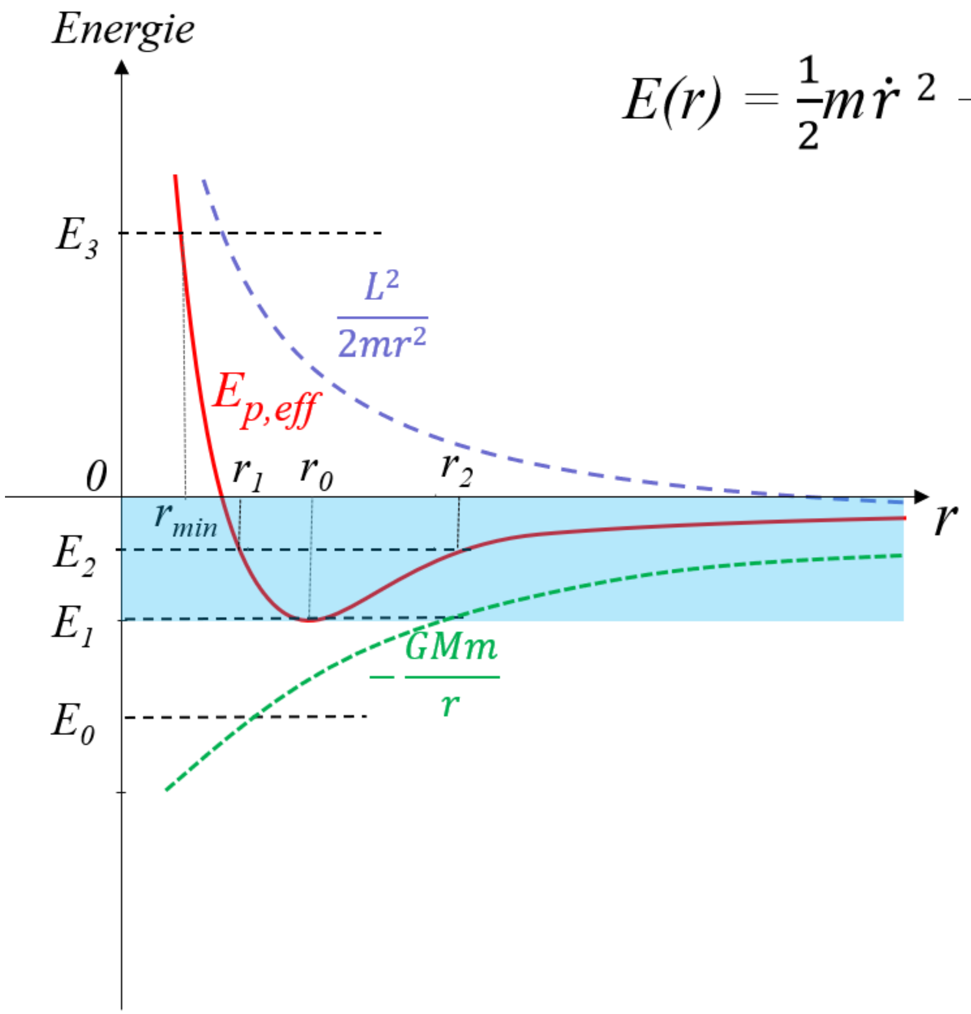
$L = mrv$ aux extrema de la trajectoire car $\vec{r} \perp \vec{v}$

⇒ $L_{apogée/aphélie} = L_{périgée/périhélie}$

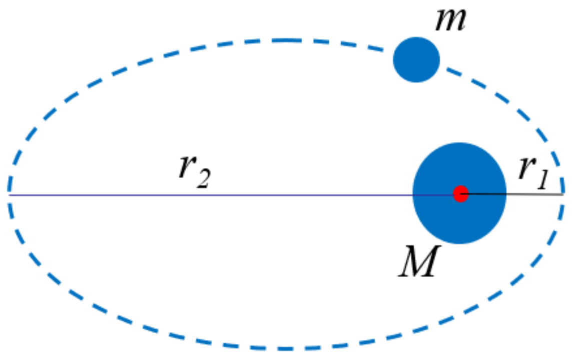
$mr_1v_1 = mr_2v_2$

Gravitation

- Potentiel effectif - Orbites



$$E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^{\,2} + \underbrace{\boxed{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}}}_{E_{p,eff}} = cte$$



Trajectoire en fonction de l'énergie mécanique

$E_0 < E_1$: pas d'orbite possible. L'objet chute sur la masse M.

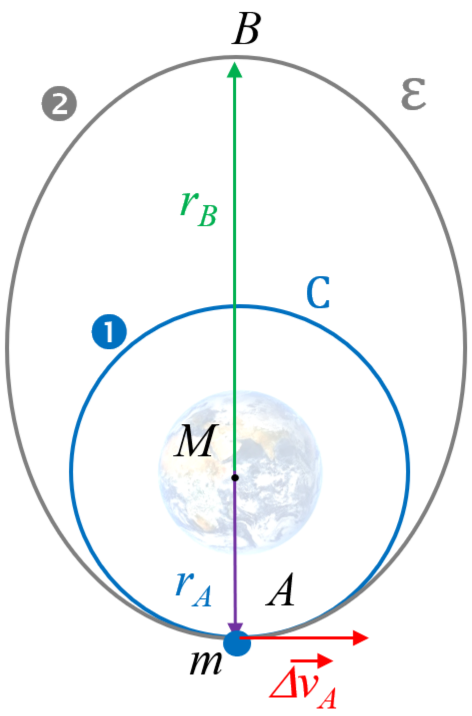
E_1 : un mouvement orbitale est possible avec un rayon constant r_0. La trajectoire est circulaire.

E_2 $(E_1 < E_2 < 0)$: un mouvement orbitale est possible avec un rayon qui varie entre r_1 et r_2. La trajectoire est une ellipse.

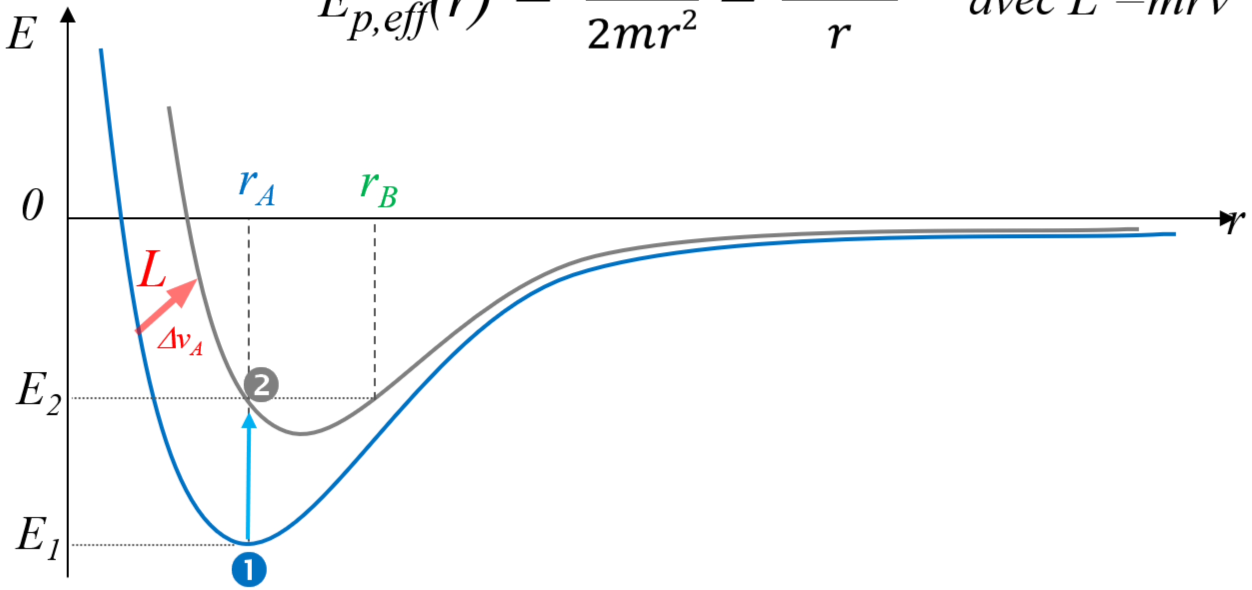
$E_3 \geq 0$: pas de mise en orbite possible. La trajectoire est une hyperbole. Un objet venant de l'infini s'approche jusqu'à la distance r_{min} puis s'éloigne à nouveau à l'infini.

Gravitation

- Potentiel effectif - Orbites

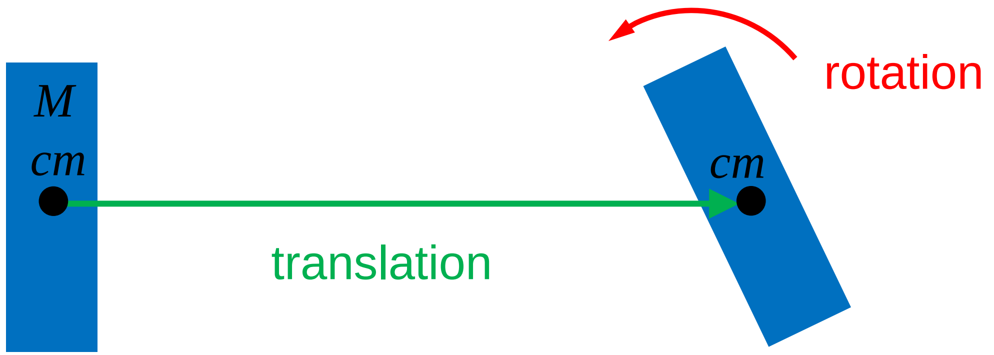


$$E_{p,eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \quad avec\ L = mrv$$



Dynamique du solide

- Description du mouvement



Translation du ***centre de masse*** *et rotation du solide autour d'un* ***axe*** *passant par le centre de masse*

Le mouvement du centre de masse (*cm*) est décrit par

$$\boxed{M\frac{d\overrightarrow{v_{cm}}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}}$$

Le mouvement de rotation est décrit par

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_O}\,(\overrightarrow{F_{ext,i}})}$$

Dynamique du solide

- Centre de masse

  - Entre plusieurs points matériels (ou centres de masse de plusieurs objets)

$$\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \sum \frac{m_i \overrightarrow{r_i}}{m}}$$

  - Pour un objet

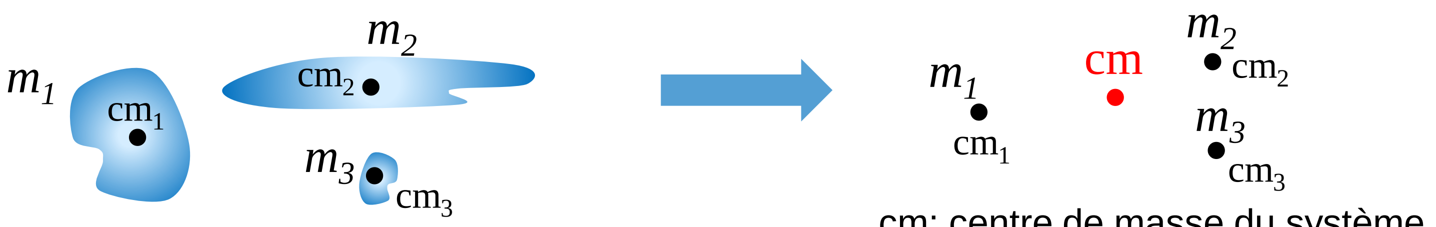
$$\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, dm}$$

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\rho}{M} \int_V \vec{r}\, dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r}\, dV$$

si masse volumique $\rho = cte$ ($M = \rho V$)

Composition des centres de masses

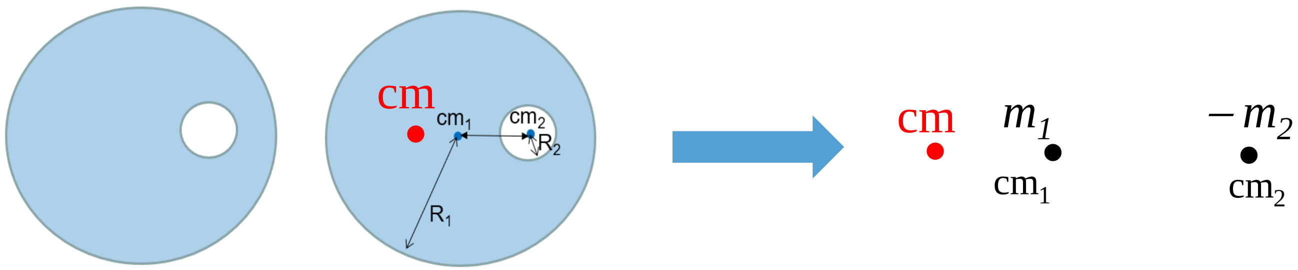
Le centre de masse d'un système composé de plusieurs objets se détermine en considérant chaque objet comme un point matériel, dont la masse est celle de l'objet et ses coordonnées celles de son centre de masse. On calcule alors le centre de masse du système composé par l'ensemble des points matériels associés à chaque objet.



cm: centre de masse du système

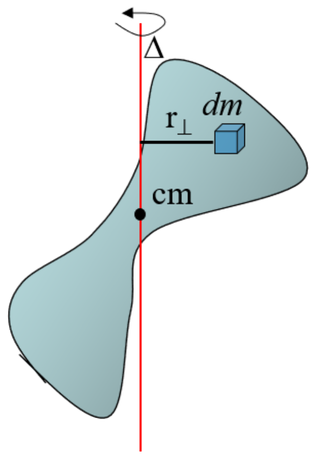
Exemple d'une roue trouée

Une roue trouée peut être vue comme la composition d'une roue pleine de rayon R_1 et d'une roue "vide" de rayon R_2. Pour calculer le centre de masse de cette roue trouée, on applique le principe de composition des centres de masses en prenant une masse "négative" pour la roue "vide".

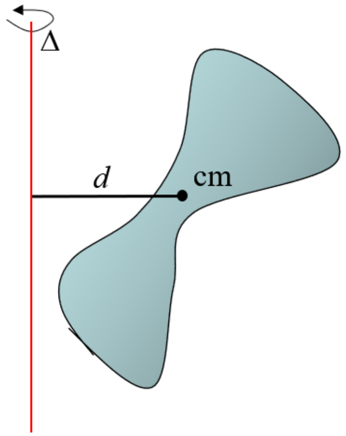


Dynamique du solide

- Moment d'inertie



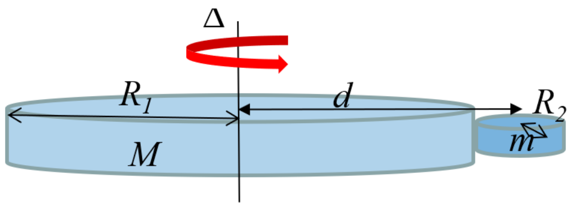
$$\boxed{I_{cm,\Delta} = \int_V r_\perp^2 dm}$$



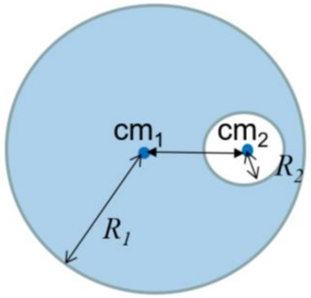
$$\boxed{I = I_{cm} + Md^2}$$

Théorème de Steiner

Energie cinétique de rotation : $\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} I_{cm,\Delta}\omega^2}$



$$I_{total} = I_{grande\ roue} + I_{petite\ roue}$$

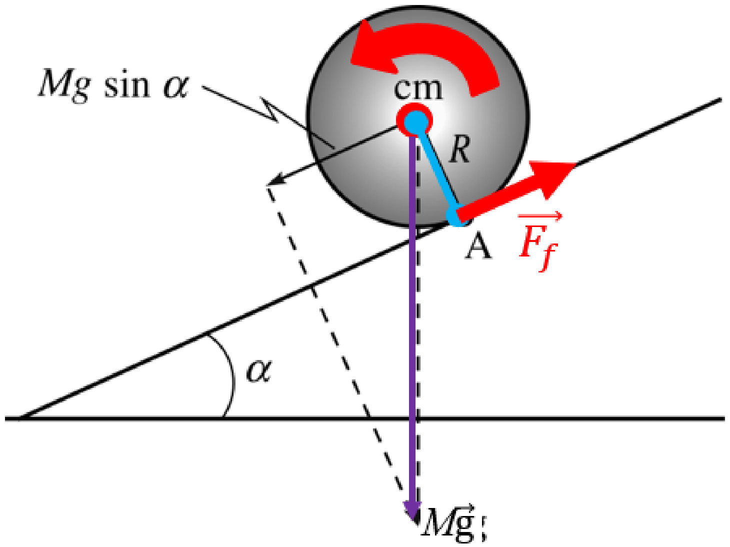


$$I_{roue\ trouée} = I_{roue\ pleine} - I_{petite\ roue}$$

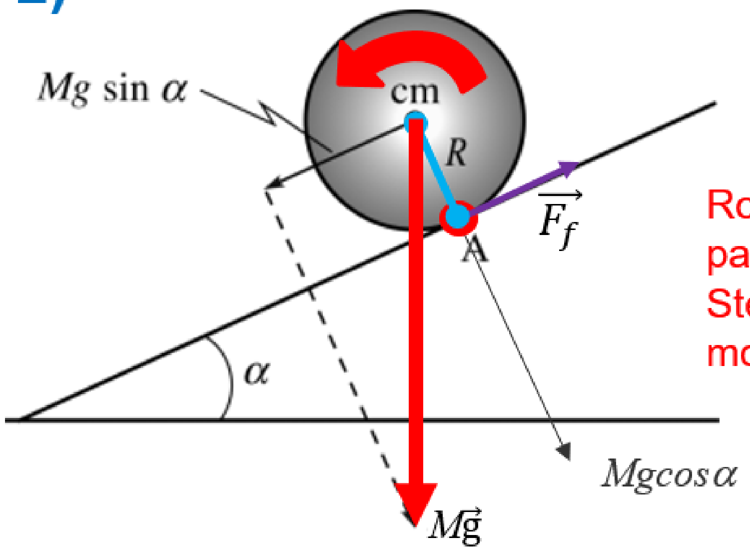
Dynamique du solide

- Roue qui roule sans glissement

1)



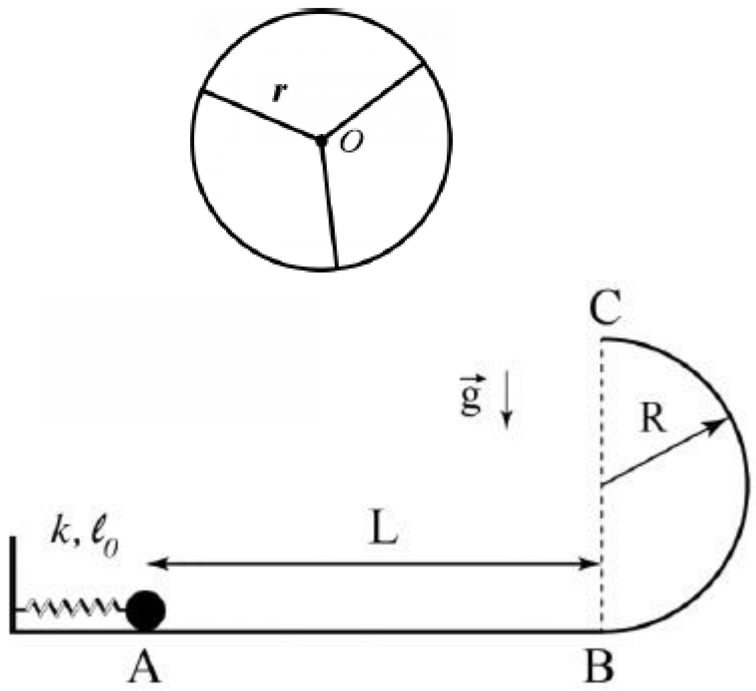
2)



Rotation autour d'un axe passant par A : on applique Steiner pour calculer le moment d'inertie

● : axe de rotation considéré

Roue (solide indéformable)



La masse totale de la roue : $M = m + 3m = 4m$

Condition de décrochage en C : $Mg = M \cdot \frac{v_C^2}{R-r}$

$N_{min} = m\, v^2/R - mg$

Energie cinétique de la roue : $E_c = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2$

avec $\omega = \frac{v}{r}$ (roulement sans glissement) $\Rightarrow E_c = 3mv^2$

Conservation de l'énergie mécanique entre B et C :

$3m\,(v_B^2 - v_C^2) = Mg \cdot 2(R-r) \Rightarrow \boxed{v_{B,min} = \sqrt{\frac{11}{3} g (R-r)}}$